Grupa A

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.02.2013.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} x^2-8 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < -x$.

2. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = x^2 e^{-\frac{x}{3}}.$$

3. Odrediti integrale (a) $\int (x^2+2x)\, cos\, 2x\, dx$ i (b) $\int \frac{(5x-3)\, dx}{\sqrt{-34+12x-x^2}}$.

4. Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = 0$.

Grupa B

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.02.2013.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & x^2-1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D > x$.

2. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

3. Odrediti integrale (a) $\int (\frac{3}{2}x^2+3x)\, sin\, 3x\, dx$ i (b) $\int \frac{(4x+2)\, dx}{\sqrt{-22+10x-x^2}}$.

4. Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' + y - e^x = 0$ koje zadovoljava uslov $y(a) = b$.

Grupa C
Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.02.2013.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & -9 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & x^2 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D > -2x$.

2. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = xe^{-\frac{x^2}{4}}.$$

3. Odrediti integrale (a) $\int x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \, dx$ i (b) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{-7+6x-x^2}}$.

4. Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $y' - y \, tg \, x = \frac{1}{cos \, x}$ koje zadovoljava uslov $y(0) = 0$.

Grupa D
Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.02.2013.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & x^2-13 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & 7 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 4x$.

2. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

3. Odrediti integrale (a) $\int x \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x \, dx$ i (b) $\int \frac{(3x-7)\,dx}{\sqrt{-33+12x-x^2}}$.

4. Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' - 3y = x^4 e^x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = e$.

Ⓣ Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} x^2-8 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

a zatim riješiti nejednačinu $D < -x$.

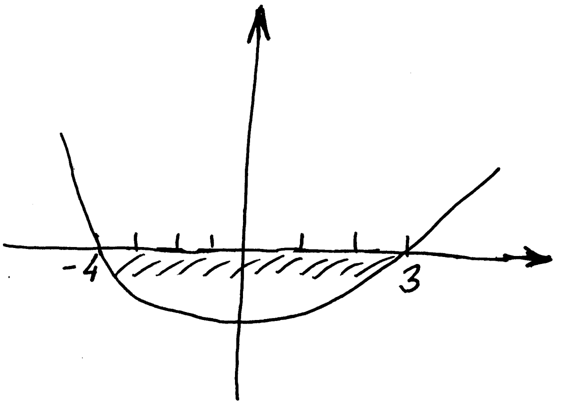
Rj.-upute:

$D = x^2 - 12$

$x^2 - 12 < -x$

$x^2 + x - 12 < 0$

$(x-3)(x+4) < 0$



$x \in (-4, 3)$

Ⓣ Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & x^2-1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

a zatim riješiti nejednačinu $D > x$.

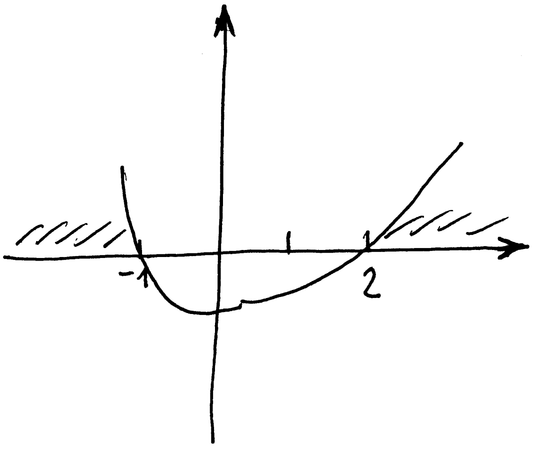
Rj.-upute:

$D = x^2 - 2$

$x^2 - 2 > x$

$x^2 - x - 2 > 0$

$(x+1)(x-2) > 0$



$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(#) Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & -9 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & x^2 \end{vmatrix}$,

a zatim riješiti nejednačinu $D > -2x$.

Rj.-upute

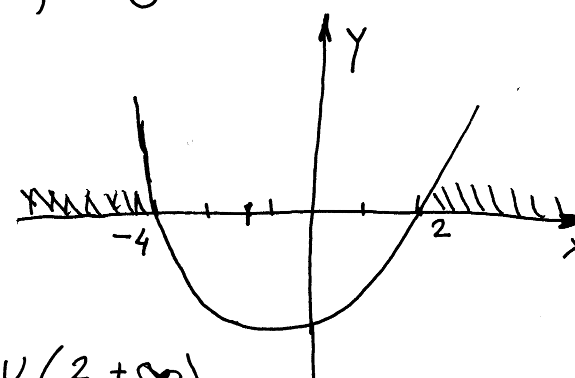
$D = x^2 - 8$

$(x-2)(x+4) > 0$

$D > -2x$

$x^2 - 8 > -2x$

$x^2 + 2x - 8 > 0$



$x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

(#) Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & x^2-13 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & 7 \end{vmatrix}$,

a zatim riješiti nejednačinu $D < 4x$.

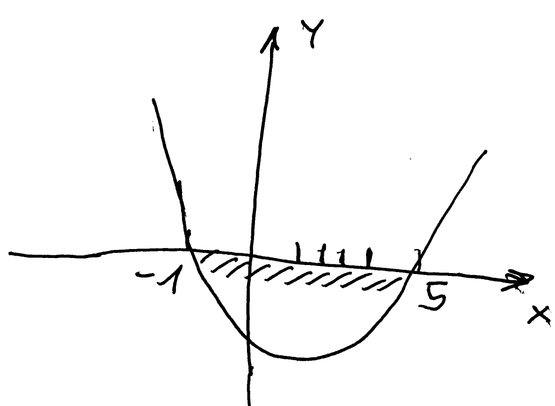
Rj.-upute:

$D = x^2 - 5$

$x^2 - 5 < 4x$

$x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$



$x \in (-1, 5)$.

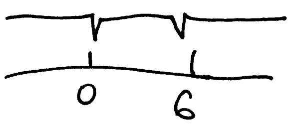
Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y=x^2e^{-\frac{x}{3}}$.

Rj. definiciono područje

$x \in R$

$$y' = -\frac{1}{3}x(x-6)e^{-\frac{x}{3}}$$

$y'=0$ akko $x=0$ ili $x=6$



prekidi y + nule y'

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, +\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		MIN	MAX

rast i opadanje

$f(0)=0$, $f(6)=36e^{-2}=\frac{36}{e^2}$

F-ja ima ekstreme, i to $MIN(0,0)$, $MAX\left(6, \frac{36}{e^2}\right)$.

$$y'' = \frac{1}{9}(x^2-12x+18)e^{-\frac{x}{3}}$$

$y''=0$ akko $x^2-12x+18=0$

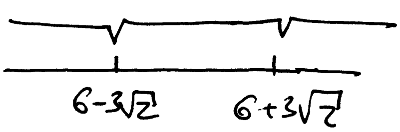
$D = 144-72 = 72 = 2\cdot4\cdot9$

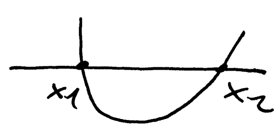
$x_{1,2} = \frac{12\pm6\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = 6-3\sqrt{2}$, $x_2 = 6+3\sqrt{2}$

x	$(-\infty, 6-3\sqrt{2})$	$(6-3\sqrt{2}, 6+3\sqrt{2})$	$(6+3\sqrt{2}, +\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$
		P.T.	P.T.

intervali konveksnosti i konkavnosti

prekidi y + nule y''





$f(6-3\sqrt{2}) = (6-3\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}}$

$f(6+3\sqrt{2}) = (6+3\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}}$

Prevojne tačke su $P_1\left(6-3\sqrt{2}, (6-3\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ i $P_2\left(6+3\sqrt{2}, (6+3\sqrt{2})^2e^{-2-\sqrt{2}}\right)$.

Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = x e^{-\frac{1}{x}}$.

Rj:

definiciono područje

$x \neq 0$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$y' = \frac{(x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$y' = 0$ akko $x + 1 = 0$

$x = -1$

prekidi y + nule y'

-1 $\quad$ 0

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

MAX

tabela rasta i opadanja

$$f(-1) = (-1)\, e^{1} = -e$$

F-ja ima maksimum u tački $M(-1, -e)$

$$y'' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$y'' \neq 0 \; \forall x \in D$

F-ja nema prevojnih tačaka

0

prekidi y + nule y''

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

tabela konveksnosti i konkavnosti

Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Rj.

definiciono područje

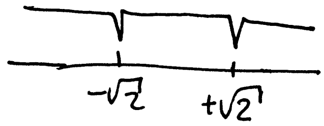
$x \in \mathbb{R}$

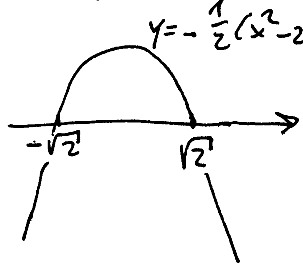
$$y' = -\frac{1}{2}(x^2-2)\, e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$y' = 0$ akko $x^2 - 2 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

prekidi y
tnule y'





x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
y'	−	+	−
y	↘	↗	↘
	MIN	MAX	

tabela rasta i opadanja

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$$

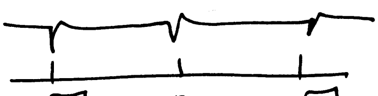
Ekstremi f-je su $MIN\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\right)$ i $MAX\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\right)$.

$$y'' = \frac{1}{4}\, x(x^2-6)\, e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$y'' = 0$ akko $x(x^2-6) = 0$

$x = 0$ ili $x^2 = 6$

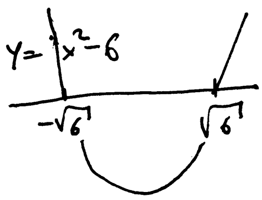
$x = \pm\sqrt{6}$



← prekidi y
tnule y''

x	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, +\infty)$
y''	−	+	−	+
y	∩	∪	∩	∪
	PT₀	PT₀	PT₀	

tabela



$$f(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6}\, e^{-\frac{6}{4}}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}\, e^{-\frac{6}{4}}$$

Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $P_2(0,0)$ i $P_3\left(\sqrt{6}, \sqrt{6}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

(#) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = x e^{-\frac{x}{2}}$.

Rj: definiciono područje

$x \in \mathbb{R}$

$x \in (-\infty, +\infty)$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y'	$+$	$-$
y	↗	↘

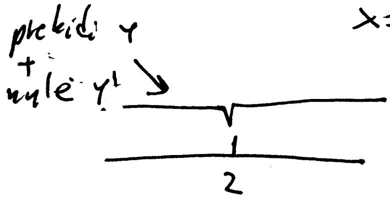
MAX

tabela rasta i opadanja

$$y' = -\frac{1}{2}(x-2)\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$y' = 0$ akko $x - 2 = 0$

$x = 2$



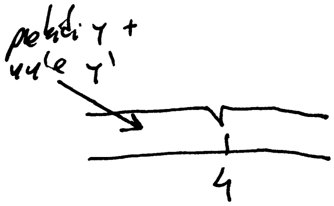
$$f(2) = 2\, e^{-\frac{(2)}{2}} = 2e^{-1}$$

F-ja ima ekstrem i to maksimum u tački $M(2, 2e)$.

$$y'' = \frac{1}{4}(x-4)\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$y'' = 0$ akko $(x-4) = 0$

$x = 4$



x	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

PT.

tabela konveksnosti i konkavnosti

$$f(4) = 4\, e^{-\frac{4}{2}}$$

F-ja ima prevojnu tačku $P(4, 4e^{-2})$

(#) Odrediti sljedeće integrale

a) $\int (x^2+2x)\cos 2x\,dx$ b) $\int (\frac{3}{2}x^2+3x)\sin 3x\,dx$

c) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$ d) $\int x \operatorname{arcctg} x\,dx$

Rj.

a) $$\int (x^2+2x)\cos 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+2x & dv = \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x\,d(2x) \\ du = (2x+2)\,dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x - \int (x+1)\sin 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x+1 & dv = \sin 2x\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x - \left(-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x + \frac{1}{2}(x+1)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

b) $$\int (\frac{3}{2}x^2+3x)\sin 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{3}{2}x^2+3x & dv = \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x\,d(3x) \\ du = 3x+3 & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right|$$

$$= (-\frac{1}{2}x^2 - x)\cos 3x + \int (x+1)\cos 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x+1 & dv = \cos 3x\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right|$$

$$= (-1)\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\cos 3x + \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+2x)\cos 3x + \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

c) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \overbrace{}^{+1-1}}{1+x^2} dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

d) $\displaystyle\int x \operatorname{arcctg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arcctg} x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{-1}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \; {}^{+1-1}}{1+x^2} dx =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

(#) Odrediti integrale

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{-34+12x-x^2}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{-7+6x-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{\sqrt{-22+10x-x^2}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{\sqrt{-33-12x-x^2}}\,dx$

Rj. JEDAN OD NAČINA ZA RJEŠAVANJE JE

a)

$$-34+12x-x^2=-(x^2-12x+34)=-(x^2-2\cdot x\cdot 6+6^2-6^2+34)=$$
$$=-((x-6)^2-2)=2-(x-6)^2$$

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{-34+12x-x^2}}\,dx=\int \frac{5x-3-27+27}{\sqrt{2-(x-6)^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{želimo uvesti smjenu}\\ 2-(x-6)^2=s\\ -2(x-6)\,dx=ds\\ (x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\,ds\\ 5(x-6)\,dx=-\frac{5}{2}\,ds\\ (5x-30)\,dx=-\frac{5}{2}\,ds\end{array}\right|$$

$$=5\int \frac{(x-6)\,dx}{\sqrt{2-(x-6)^2}}\,dx+27\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-6)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{uvodimo smjenu}\\ 2-(x-6)^2=s\\ (x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\,ds\end{array}\right|=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int s^{-\frac{1}{2}}\,ds+27\int \frac{d(x-6)}{\sqrt{2-(x-6)^2}}=$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot 2\cdot s^{\frac{1}{2}}+27\arcsin\frac{x-6}{\sqrt{2}}+C=-5\sqrt{2-(x-6)^2}+27\arcsin\frac{x-6}{\sqrt{2}}+C$$

b)

$$-22+10x-x^2=-(x^2-10x+22)=-(x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2-5^2+22)=$$
$$=-((x-5)^2-3)=3-(x-5)^2$$

$$\int \frac{4x+2}{\sqrt{-22+10x-x^2}}\,dx=\int \frac{4x+2-22+22}{\sqrt{3-(x-5)^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{želimo uvesti smjenu}\\ 3-(x-5)^2=s\\ -2(x-5)\,dx=ds \quad (x-5)\,dx=-\frac{1}{2}\,ds\end{array}\right|$$

$$= 4\int \frac{(x-5)\ dx}{\sqrt{3-(x-5)^2}}\,dx + 22\int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-5)^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{uvedimo smjenu} \\ 3-(x-5)^2 = s \\ (x-5)dx = -\frac{1}{2}ds \end{array} \right|$$

$$= 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int s^{-\frac{1}{2}}ds + 22\int \frac{d(x-5)}{\sqrt{3-(x-5)^2}} = (-2)\cdot 2\, s^{\frac{1}{2}} + 22 \arcsin \frac{x-5}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -4\sqrt{3-(x-5)^2} + 22 \arcsin \frac{x-5}{\sqrt{3}} + C \quad \text{traženo rješenje}$$

c) $-7+6x-x^2 = -(x^2-6x+7) = -(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+7) =$

$= -((x-3)^2-2) = 2-(x-3)^2$

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{-7+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{2x-1\;{}^{-5+5}}{\sqrt{2-(x-3)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \text{želimo uvesti smjenu} & \\ 2-(x-3)^2 = s & \\ -2(x-3)\,dx = ds & (x-3)dx = -\frac{1}{2}ds \end{array} \right|$$

$$= 2\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{2-(x-3)^2}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-3)^2}} = \left| \begin{array}{l} 2-(x-3)^2 = s \\ (x-3)dx = -\frac{1}{2}ds \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int s^{-\frac{1}{2}}ds + 5\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{2-(x-3)^2}} = (-1)\cdot 2\, s^{\frac{1}{2}} + 5\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}} + C$$

$$= -2\sqrt{2-(x-3)^2} + 5\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}} + C \quad \text{traženo rješenje}$$

d) za vježbu

uputa: $-33-12x-x^2 = 3-(x+6)^2$

rješenje $\quad I = -3\sqrt{3-(x+6)^2} - 25\arcsin\frac{x+6}{\sqrt{3}} + C$

(#) Odrediti rješenje diferencijalne jednačine

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x$$ koje zadovoljava uslov $y(1) = 0$.

Rj.

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x \quad /:x$$

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}y = 1$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = \varphi(x)$, $\left(p(x) = -\frac{1}{x(x+1)}, \ \varphi(x) = 1\right)$

uvodimo smjene $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' - \frac{1}{x(x+1)}uv = 1$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{x(x+1)}v\right)} = 1$$

a) $$v' - \frac{1}{x(x+1)}v = 0$$

$$v' = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad /\cdot x(x+1)$$

$$1 = A(x+1) + Bx$$

$$A + B = 0$$

$$A = 1 \Rightarrow B = -1$$

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\ln|v| = \ln|x| - \ln|x+1|$$

$$\ln|v| = \ln\frac{x}{x+1}$$

$$v = \frac{x}{x+1}$$

b) $$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{x(x+1)}v\right)}_{\text{za } v = \frac{x}{x+1}} = 1$$

ovaj dio je jednak nuli

$$u'\frac{x}{x+1} = 1, \quad u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$du = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$u = x + \ln|x| + C$$

$$y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C)$$

je opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y(1) = 0 \Rightarrow x = 1, \ y = 0$$

$$0 = \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\ln 1}_{=0} + C) \Rightarrow 1 + C = 0$$

$$C = -1$$

$$y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)

(#) Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' + y - e^x = 0$ koje zadovoljava uslov $y(a) = b$.

Rj:

$$xy' + y = e^x \quad /:x$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^x$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = q(x)$, ($p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x}e^x$), uvodimo smjene $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{x}e^x$$

$$u'v + \underbrace{u\left(v' + \frac{v}{x}\right)} = \frac{e^x}{x}$$

a) $v' + \frac{v}{x} = 0$

$$v' = \frac{dv}{dx} \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

b) $u'v + \underbrace{u\left(v' + \frac{v}{x}\right)} = \frac{e^x}{x}$

za $v = \frac{1}{x}$ ovaj dio je jednak nuli

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} \quad /\cdot x$$

$$u' = \frac{du}{dx} \qquad \frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$u = e^x + c$$

$$y = \frac{e^x + c}{x}$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

$y(a) = b$

$x = a$, $y = b$

$$b = \frac{e^a + c}{a} \Rightarrow e^a + c = ab$$

$$c = ab - e^a$$

$$y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)

(#) Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y(0)=0$.

Rj.

$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = g(x)$, uvodimo smjenu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti.

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + u\underbrace{(v' - v \operatorname{tg} x)} = \frac{1}{\cos x}$$

a) $v' - v \operatorname{tg} x = 0$

$$v' = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \quad / \int$$

$$\ln |v| = -\ln|\cos x|$$

$$v = (\cos x)^{-1}$$

$$v = \frac{1}{\cos x}$$

b) $u'v + u\underbrace{(v' - v \operatorname{tg} x)} = \frac{1}{\cos x}$

ovaj dio je jednak nuli za $v = \frac{1}{\cos x}$

$$u' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad / \cdot \cos x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$u = x + c$$

$y = \frac{x+c}{\cos x}$ je opšte rješenje diferencijalne jednačine

$y(0) = 0$

$x = 0,\ y = 0$

$$0 = \frac{0 + c}{\underbrace{\cos 0}_{=1}} \Rightarrow c = 0$$

$y = \frac{x}{\cos x}$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)

#) Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' - 3y = x^4 e^x$ tako da je $y(1) = e$.

Rj

$$xy' - 3y = x^4 e^x \quad /:x$$

$$y' - 3\frac{1}{x}y = x^3 e^x$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = q(x)$

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = x^3 e^x$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{3}{x}v\right)} = x^3 e^x$$

a) $v' - \frac{3}{x}v = 0$

$$v' = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = 3\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = 3\ln|x|$$

$$v = x^3$$

b) $u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{3}{x}v\right)} = x^3 e^x$

za $v = x^3$ ovaj dio je jednako 0

$$u'x^3 = x^3 e^x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x dx \qquad u = e^x + c$$

$y = x^3(e^x + c)$ je opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y(1) = e \Rightarrow 1^3(e^1 + c) = e$$

$$e + c = e$$

$$c = 0$$

$y = x^3 e^x$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)